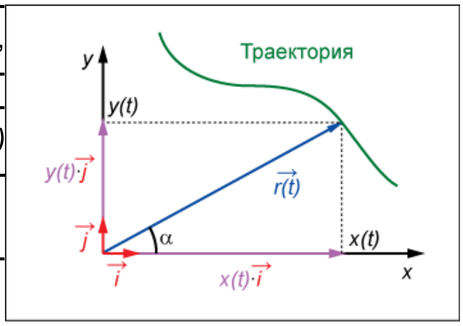
Закон движния тела. Виртуальная лабораторная работа №1

Закон движения материальной точки (М.Т.) — это уравнение, связывающее положение точки с моментом времени, в который это положение наблюдается. Положение М.Т. может задаваться в векторной форме: $\mathbf{r}(t)$[1] (зависимость радиус-вектора от времени) или в координатной форме: $x(t)$, $y(t)$ (зависимость координат от времени). При этом имеют место следующие равенства:



$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$ — разложение радиус-вектора по компонентам

$x^2(t)+y^2(t)=|\mathbf{r}|^2(t)$ — теорема Пифагора

$x(t)=|\mathbf{r}|(t)\cdot cos(\alpha)$; $y(t)=|\mathbf{r}|(t)\cdot sin(\alpha)$ — определения тригонометрических функций[2].

Скорость тела определяются как *производная от радиус-вектора* по времени:

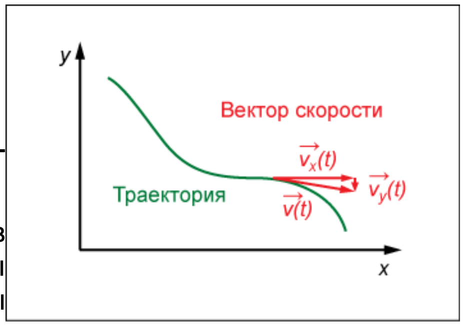
$\mathbf{v}(t)=d\mathbf{r}(t)/dt$. *(Сравните с определением средней скорости:* $\mathbf{v}_{cp}(t)=\Delta\mathbf{r}(t)/\Delta t$*)*.

Это равенство эквивалентно одновременному выполнению нескольких равенств для координат:

$v_x(t)=dx(t)/dt$; $v_y(t)=dy(t)/dt$

Эти соотношения (законы движения для скоростей) выражают зависимости прекций вектора скорости скорости $\mathbf{v}(t)$ на соответствующие направления и могут быть получены путем *дифференцирования законов движения*.

Для этих проекций, как и *для любых других векторов*, имеют место аналогичные равенствам для координат соотношения:



$v_x^2(t)+v_y^2(t)=|\mathbf{v}|^2(t)$ — теорема Пифагора

$v_x(t)=|\mathbf{v}|(t)\cdot cos(\alpha)$;$v_y(t)=|\mathbf{v}|(t)\cdot sin(\alpha)$ —определения тригонометрических функций.

В классической механике *механическое состояние М.Т.* в момент времени *t* считается заданным, если определены её координаты и скорости: $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$. Т.о. Законы движения (для координат и скоростей) позволяют определить состояние М.Т. Если рассматриватся движение нескольких М.Т. , то говорят о *состоянии системы М.Т.*, которое определяется совокупностью состоняий М.Т., из которых состоит система: $x_1(t)$, $y_1(t)$, $v_{x1}(t)$, $v_{y1}(t)$; $x_2(t)$, $y_2(t)$, $v_{x2}(t)$, $v_{y2}(t)$ …

Функции, соответствующие законам движения М.Т., определются при решении системы уравнений, получаемых из *второго закона Ньютона*:

$F_x(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = m\cdot a_x(t)$

$F_y(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = m\cdot a_y(t)$

Здесь F_x и F_y — проекции *вектора силы*, зависящие в общем случае от радиус-вектора М.Т., вектора скорости М.Т. и времени, а a_x и a_y — соответствующие проекции ускорений М.Т. Ускорение — это производная скорости по времени или вторая производная радиус-вектора: $\mathbf{a}(t)=d\mathbf{v}(t)/dt = d^2\mathbf{r}(t)/dt^2$

Таким образом, уравнния, получаемые из второго закона Ньютона связывают координаты М.Т., их первую (скорость) и вторую (ускорение) производные по времени. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями.* Решение дифференциального уравнения —

[1] Векторные величины выделяются жирным шрифтом.
[2] Здесь и дале мы рассматриваем движение в плоскости XY.

это, в отличие от обычного алгебраического уравнения, не число, а некоторая функция. Эта функция как раз и определяет конкретный вид уравнения движения.

Частный вид законов движения М.Т. т.е. конкретный вид уравнений движения всегда зависит также так же от *начального состояния М.Т.*, — её положения в нулевой (начальный) момент времени: $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ и начальных скоростей: $v_{0x} = v_x(0)$, $v_{0y} = v_y(0)$.

Решение дифференциальных уравнений не входит в школьную программу курсов физики и математики, однако в самых простейших случаях уравнения, возникающие при рассмотрении второго закона Ньютона, сводятся к системе линейных, квадратных или тригонометрических уравнений, которые изучаются в школе. К таким случаям относятся:

1. движение под действием постоянной силы **F** = const (например, в поле тяжести Земли),
2. движние под действием упругой силы F(x)=-k·x (гармонические колебания).

Если не задаваться вопросом о физической природе сил, вызывающих данное движение, то формально можно рассматривать и любые другие законы движния, например:

$x(t)=A\cdot t^3 + B\cdot \ln(t/\tau)+C\cdot\arcsin(3^{D\cdot t+2} + E\cdot t)$.

Однако, подобные примеры лежат, обычно, за рамками школьной физики и физики вообще, поскольку не описывают каких-либо реальных физических процессов и являются абстрактными фантазиями. Тем не менее, формально, при правильном введении размерности Коэффициентов A, B, C, D, E, данный пример может быть рассмотрен как некий закон движения некоего тела, то есть мы можем вычислить скорость ускорение тела в любой момент времени, могут быть определены силы, вызывающиее такое движение.

Пример 1: Движение в поле тяжести Земли (под действием постоянной силы).

Законы движения определяются из уравнний:

$F_x = 0$

$F_y = -m\cdot g$

Частный вид, законов движения, соответствующий решениям предыдущей *системы дифференциальных уравнений,* записывается в виде:

$x(t)=x(0) + v_x(0)\cdot t$

$y(t)=y(0) + v_y(0)\cdot t - g\cdot t^2/2$

Пример 2: Гармонические колебания (под действием силы упругости).

Закон движения определяется из уравнния:

$F_x(t) = -k\cdot x(t) = ma_x(t)$

Частный вид закона движения, соответствующий решению предыдущего *дифференциального уравнения,* записывается в виде:

$x(t)= A\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)$,

где $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ *— частота колебаний,* $A=\sqrt{\frac{m}{k}v_0^2+x_0^2}$ *— амплитуда колебаний* φ_0 *— начальная фаза колбаний,* которая находится из уравнения $x_0=A\cdot\cos(\varphi_0)$.

В данном случае начальное состояние М.Т. удобно записывать не через x_0 и v_0 — начальные координату и скорость точки, а через A и φ_0 — Амплитуду и начальную фазу колебаний, которые являются функциями $A=A(x_0, v_0)$; $\varphi_0=\varphi_0(x_0, v_0)$.

Литература:

1. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Физика для углубленного изучения, т. 1, Механика.