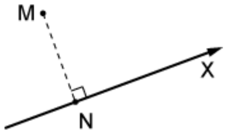
Вектора, длины векторов, компоненты и проекции

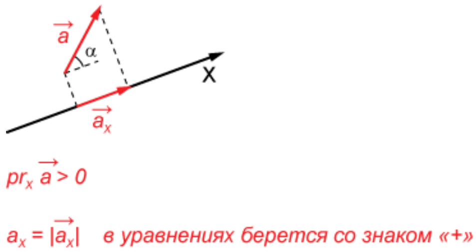
В физике многие физические величины, такие как: перемещение, скорость, ускорение, сила, импульс и др. являются векторными. Все физические законы, выражающие соотношения между этими величинами, записываются в векторной форме. В некоторых задачах запись законов физики в векторной форме значительно упрощает решение, делает его более наглядным и изящным. Однако, стандартный метод решения физических задач предполагает переход от общей записи *законов физики в векторной форме* к *алгебраической системе уравнений*, в которой присутствуют только скалярные величины. Например, векторная запись $\vec{F}=m\vec{a}$ подразумевает переход к двум уравнениям: $F_x = ma_x$ и $F_y = ma_y$. Здесь буквами с индексами обозначаются **проекции (!!!)** соответствующих векторов.

Для того, чтобы научиться решать задачи необходимо уметь пользоваться и понимать связь и различия между следующими понятиями:

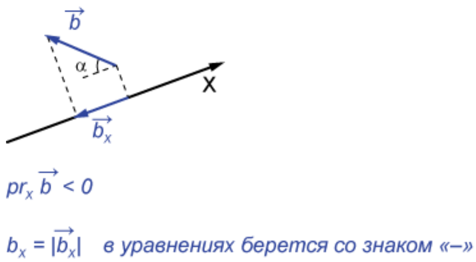


<u>Проекция точки</u> *M* на ось *X* — это точка *N*, являющаяся основанием перпендикуляра, опущенного из точки *M* на ось *X*.

<u>Компонента вектора</u> $\vec{a}$ вдоль оси *X* — это **вектор** $\vec{a}_X$, коллинеарный оси *X*, начало и конец которого совпадает с проекциями соответственно начала и конца вектора $\vec{a}$.



<u>Модулем компоненты</u> вектора $\vec{a}$ вдоль оси *X* является число $|\vec{a}_X|$, равное длине вектора $\vec{a}_X$. Эта величина может быть найдена, если известна длина исходного вектора и угол α между вектором и соответствующей осью: $|\vec{a}_X|=|\vec{a}|\cdot|\cos\alpha|$. В школьной физике *именно эту величину принято использовать при составлении уравнений для решения задач.*



<u>Проекция вектора</u> $\vec{a}$ на ось *X* — это **число**,

$pr_X\vec{a}$,

равное длине компоненты вектора $\vec{a}$ вдоль оси *X*, если она *сонаправлена* оси *X*:

$pr_X\vec{a}=|\vec{a}_X|$, если $\vec{a}_X \uparrow\uparrow X$

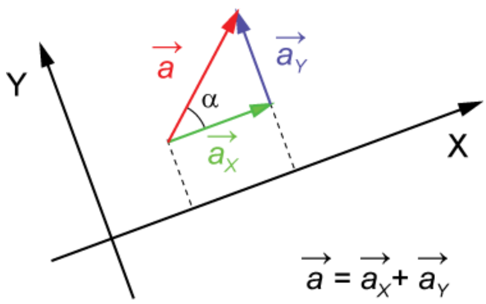
равное «*минус длине*» компоненты, если она *противоположно направлена* оси *X*:

$pr_X\vec{a}=-|\vec{a}_X|$, если $\vec{a}_X \uparrow\downarrow X$

Следует отметить, что в литературе по физике, в т.ч. справочной и учебной, четкое и детальное различие между этими понятиями проводится не всегда. Часто проекции вектора называют компонентами или путают их с длинами компонент и т.п. Поскольку выбор системы координат является произвольным, числовые значения векторных величин в задачах принято обозначать положительными числами (т.е. длиной соответствующего вектора). Например: «скорость падающего тела равна v =10 м/с» или «Сила, направленная под углом 45° к горизонту, равна F =2 Н». Таким образом, **буквой без значка вектора принято обозначать длину вектора,** (т.е. при таких обозначениях под F без значка вектора мы подразумеваем $|\vec{F}|$). И именно эти «буквы без вектора» и используются при решении задач по физике. **Буква без вектора — это длина соответствующего вектора!!** Из-за этого возникает ряд вопросов определения знака физической величины при переходе от записи уравнений в *векторной форме* к системам уравнений, записанных в *скалярной форме*. Общее правило звучит следующим образом: «**Если вектор сонаправлен соответствующей <u>оси в выбранной системе координат</u>, то**

при переходе от векторной записи к скалярной, он берется со знаком ’+’, в противном случае — со знаком ’–’».

Если исходный вектор направлен под углом к обеим осям, то он представляется в виде суммы компонент: $\vec{a}=\vec{a}_X+\vec{a}_Y$, и приведенное выше правило применяется к двум полученным векторам. Стоит отметить, что под записью a_x без значка вектора мы опять таки понимаем длину компоненты $\vec{a}_X$ т.е. на самом деле $|\vec{a}_X|$.



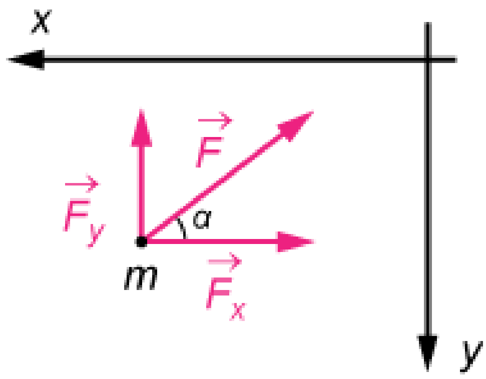
Поскольку вектора $\vec{a}$, $\vec{a}_X$ и $\vec{a}_Y$ образуют прямоугольный треугольник, то для соответствующих длин верна теорема Пифагора:
$a^2 = a_X^2 + a_Y^2$,

а сами длины связаны соотношениями:
$\boldsymbol{a_X = a\cdot\cos\alpha}$ **;**
$\boldsymbol{a_Y = a\cdot\sin\alpha}$

Пример задачи

На материальную точку массой $m = 2$ кг действует сила $F = 10$ Н, направленная под углом 30° к горизонту. Найти ускорение вертикальной проекции точки.

Решение
Рассмотрим движение точки в выбранной системе координат (система выбрана таким образом не из соображений удобства, а для того, чтобы проиллюстрировать произвольность ее выбора).



Тело движется под действием единственной силы в соответствии со вторым законом Ньютона:
$\vec{F}=m\vec{a}$
Перепишем этот закон в скалярной форме:
$-F_x = m\cdot(-a_x)$
$-F_y = m\cdot(-a_y)$
Здесь силы и ускорения взяты со знаками «–» в силу соответствующего выбора системы координат. Не трудно видеть, что, домножив оба равенства на –1, мы получим:
$F_x = m\cdot a_x$
$F_y = m\cdot a_y$
Систему уравнений, которую мы сразу бы имели в случае «обычного» выбора направления координатных осей. То есть видно, что тот или иной выбор системы координат не отражается на результате решения задачи, а нужен лишь для определения верных знаков при переходе от векторного уравнения к системе двух скалярных.

В задаче нас интересует вертикальная составляющая ускорения:

$a_y = F_y/m = F\cdot\sin\alpha/m$ = 10Н · 0,5 / 2 кг = 2,5м/с^2

Ответ: $\boldsymbol{a_y}$ **= 2,5м/с^2**

Следует обратить внимание на то, что в ответе дается числовое значение ускорения без учета знака, т.е. модуль вертикальной компоненты ускорения, который не зависит от выбора направления системы координат.